CÁLCULO DE DERIVADAS **Ficha1**

1.- Halla, aplicando la definición, la función derivada de las siguientes funciones e indica en cada una de ellas qué signo tiene la pendiente de la tangente en x=0.

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = 2x + 3$

d) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

e) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

SOLUCIONES

a) $f(x) = x^2 - 1;\ f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - 1 - (x^2 - 1)}{h} =$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - 1 - x^2 + 1}{h} = = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2xh + h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(2x+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$

La pendiente de la tangente en x=0 será $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$, la tangente es horizontal

b) $f(x) = \dfrac{1}{x};\quad f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{x - (x+h)}{(x+h)x}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{hx(x+h)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{x(x+h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

La pendiente de la tangente en 0 será $f'(0) = -\dfrac{1}{0}$, es decir, no es derivable en 0

c) $f(x) = 2x + 3 \qquad f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(x+h) + 3 - (2x+3)}{h} =$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x + 2h + 3 - 2x - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h}{h} = 2$

La pendiente de la tangente en 0 será $f'(0) = 2$, es decir, positiva, con lo que la función es creciente en 0

d) $f(x) = x^2 + 2x + 1;$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 1 - (x^2 + 2x + 1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2 + h^2 + 2xh + 2x + 2h + 1 - x^2 - 2x - 1}{h} = = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2xh + 2h}{h} =$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(h + 2x + 2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h + 2x + 2) = 2x + 2$

La pendiente de la tangente en 0 será $f'(0) = 2$, es decir, positiva, con lo que la función es creciente en 0

e) $f(x) = \dfrac{2}{x-1};$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2}{(x+h) - 1} - \dfrac{2}{x-1}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2(x-1) - 2(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2x - 2 - 2x - 2h + 2}{(x+h-1)(x-1)}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h(x+h-1)(x-1)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2}{(x+h-1)(x-1)} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

La pendiente de la tangente en 0 será $f'(0) = \dfrac{-2}{(0-1)^2} = -2$, es decir, negativa, con lo que la función es decreciente en 0